Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, информатики и информационных технологий
Кафедра высшей математики

Использование прикладного пакета GAP для описания решеток подалгебр трехмерных алгебр над полем GF(2)

Выпускная квалификационная работа

Квалификационная работа
допущена к защите
Зав. кафедрой

______ ______________
дата подпись

Исполнитель:
Бочарова Татьяна Сергеевна,
обучающаяся БП-41 группы

____
подпись

Руководитель ОПОП:

____
подпись

Научный руководитель:
Коробков С.С.,
к.ф.-м.н., доцент

____
подпись

Екатеринбург 2016

Оглавление

Введение

В выпускной квалификационной работе рассматривается алгебра $A = M_3(GF(2))$ квадратных матриц порядка 3 над полем $F = GF(2)$ из двух элементов. Основным объектом исследования являются трехмерные подалгебры алгебры A. Для каждых таких подалгебр изображаются диаграммы решеток их подалгебр.

Введем понятие типа решетки подалгебр, используемое в дальнейшем.

Определение 1. Пусть S – подалгебра порядка 2^n алгебры $M_3(GF(2))$. Назовем упорядоченную последовательность $(m_0, m_1, \ldots , m_n)$ *типом* решетки подалгебр алгебры S, если m_i – число подалгебр в S порядка 2^i.

Целью исследования является решение вопроса о том, будут ли изоморфны решетки подалгебр двух трехмерных алгебр, если они имеют один и тот же тип решетки.

Внутри каждого типа решетки осуществляется классификация с точностью до изоморфизма самих подалгебр. Это позволяет решить вопрос и об изоморфизме решеток подалгебр. При этом сами подалгебры описываются на языке порожденных элементов и определяющих соотношений (т. е. таблиц умножения). В результате получена классификация трехмерных подалгебр алгебры $A = M_3(GF(2))$ с точностью до изоморфизма.

Достижение основной цели осуществляется с помощью решения следующих **задач**:

1. Построение трехмерных подалгебр.
2. Определение типов решеток подалгебр.
3. Решение вопроса об изоморфизме алгебр внутри каждого типа.

Данные задачи решаются в системе компьютерной алгебры **GAP**.

Работа состоит из введения, трех глав, списка литературы и приложений.

Первая глава носит теоретический характер. В ней содержится определение алгебры над полем, приводятся примеры алгебр, а также понятие подалгебры и признак подалгебры. Здесь же приведено определение решетки, указаны основные свойства решеток.

Так как все вычисление проводятся в системе компьютерной алгебры **GAP**, во второй главе приводится общая характеристика этой системы и основные ее команды.

Третья глава содержит практическую часть, где находятся все немоногенные трехмерные подалгебры алгебры $M_3(GF(2))$ и производится их полная классификация. Находятся решетки подалгебр и их типы для всех немоногенных подалгебр из $M_3(GF(2))$.

Основные результаты, полученные в работе, приведены в таблице № 1.

Таблица №1

№	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
1	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = r e_2 = r$	84	(1,4,4,1) Рисунок 1
2	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = r_2 = r_2 e$	14	(1,4,4,1) Рисунок 2
3	r_1, r_2	$r_1^3 = 0, r_1^2 \neq 0, r_2^2 = 0, r_1 r_2 = r_1^2$, $r_2 r_1 = 0$	21	(1,5,3,1) Рисунок 3
4	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = 0$, $e r_2 = r_2, r_2 e = 0$	42	(1,5,4,1) Рисунок 4
5	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = 0$, $e r_2 = 0, r_2 e = r_2$	42	(1,5,4,1) Рисунок 4
6	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = r_2, r_2 e = 0$	42	(1,5,4,1) Рисунок 4
7	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$,	42	(1,5,4,1) Рисунок 4

		$er_2 = 0, r_2e = r_2$		
8	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$, $e_1r = re_1 = 0, e_2r = 0, re_2 = r$	84	(1,6,5,1) Рисунок 5
9	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$, $e_1r = re_1 = 0, e_2r = r, re_2 = 0$	84	(1,6,5,1) Рисунок 5
10	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$, $e_2r = re_1 = 0, e_1r = r = re_2$	168	(1,6,5,1) Рисунок 5
11	e_1, e_2, e_3	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$	28	(1,7,6,1) Рисунок 6
12	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_i = 0$, $r_ie = r_i$	14	(1,7,7,1) Рисунок 7
13	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, r_ie = 0$, $er_i = r_i$	14	(1,7,7,1) Рисунок 7
		ИТОГО:	679	6

Оказалось, что внутри каждого типа, за исключением типа (1, 4, 4, 1), подалгебры имеют изоморфные решетки подалгебр. Подалгебры с типом решетки (1, 4, 4, 1) делятся на два подмножества и имеют неизоморфные решетки подалгебр.

ГЛАВА I. **Теоретические основы**

1.1. Понятие алгебры над полем, примеры алгебр

Определение 2 [8]. Алгеброй над полем P называется множество A, на котором определены две бинарные операции $+$ и $\cdot$, а также операция умножения элементов из P на элементы из A (то есть отображение $P \times A \to A$), удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(A, +, \cdot)$ – кольцо;
2) $(A, +)$ – векторное пространство над полем P;
3) $\forall \alpha \in P\ \forall a, b \in A\ (\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

Пример 1.

Пусть $M_n(F) = \{(\alpha_{ij})\ |\alpha_{ij} \in F\}$ –множество всех квадратных матриц с коэффициентами из поля F. Ясно, что $M_n(F)$ – кольцо относительно операций сложения и умножения квадратных матриц. Если определить умножение элементов из F на элементы из $M_n(F)$ следующим образом:

$$\forall \beta \forall (\alpha_{ij}) \in M_n(F) \beta(\alpha_{ij}) = (\beta \alpha_{ij}),$$

то относительно такого умножения и сложения матриц множество $M_n(F)$ становится векторным пространством над полем F.

Пусть $a = (\alpha_{ij})$, $b = (\beta_{ij})$, $\alpha \in F$. Тогда $(\alpha a)b = (\alpha\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\sum \alpha\alpha_{ij}\beta_{ij}) = (\sum \alpha_{ij}(\alpha\beta_{ij}))= a(\alpha b) = (\alpha(\sum \alpha_{ij}\beta_{ij})) = \alpha(ab)$.

Следовательно, $M_n(F)$ – алгебра над полем F. Эта алгебра называется *алгеброй матриц над полем F*.

Пример 2.

Пусть K – расширение поля P. Тогда

1) K – кольцо;
2) $(K, +)$ – векторное пространство над полем P;
3) $\forall \alpha \in P\ \forall a \in K\ \alpha a$ – произведение элементов в поле K и $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$. Следовательно K – алгебра над полем P.

1.2. Алгебра матриц над конечным полем

Определение 3 [8]. Пусть A — алгебра над полем P. Назовем алгебру A *конечномерной*, если A, как векторное пространство над полем P, *конечномерно*. При этом размерность векторного пространства A над P будем называть размерностью или рангом алгебры A.

Пример 3.

Пусть $A = C, P = R$. Тогда числа 1, i образуют базис C над R и потому $\dim C = 2$.

Пример 4.

Базис алгебры $M_n(F)$ образуют матричные единицы $E_{ij} = (e_{ij})$, где $e_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $e_{ij} = 1$, если $i = j$. Следовательно, $\dim M_n(F) = n^2$.

1.3. Понятие подалгебры, признак подалгебры

Определение 4 [8]. Подмножество S алгебры A над полем P назовем *подалгеброй алгебры* A, если относительно операций, определенных в A, S само является алгеброй над полем P.

Признак подалгебры: Непустое подмножество S алгебры A над полем P тогда и только тогда является подалгеброй в A, когда выполнены следующие условия:

1) $\forall a,b \in S\ a - b \in S$;
2) $\forall a,b \in S\ a \cdot b \in S$;
3) $\forall \alpha \in P\ \forall a \in S\ \alpha a \in S$.

Доказательство. Пусть S – подалгебра алгебры A. Тогда очевидно, что условия 1)- 3) выполнены. Обратно: пусть выполнены условия 1) - 3). Тогда из выполнимости условий 1) и 2) следует, что S – подкольцо кольца A, а из выполнимости условий 1) и 3) следует, что S—векторное подпространство пространства A. Условие 3) определения 3.1.выполняетсяв S, так как оно выполняется в A. Таким образом, S – подалгебра алгебры A.

1.4. Понятие решетки, основные свойства решеток

Определение 5 [6]. Верхней границей подмножества S частично упорядоченного множества (ч.у. множества) $(P, \leq)$ называется элемент $a \in P$, удовлетворяющий условию $(\forall s \in S\ s \leq a)$.

Определение 6 [6]. Верхней гранью (или супремумом) подмножества S ч. у. множества $(P, \leq)$ называется наименьший элемент в множестве верхних границ подмножества S.

Из определения 5 следует, что верхняя грань подмножества определяется однозначно (в отличие от верхней границы). Верхнюю грань подмножества S в подмножестве $T \subseteq P$ обозначают выражением $\sup_T S$, при этом индекс T, как правило, опускают, если $T = P$.

Определение 7 [6]. Двойственными понятиями верхней границы и верхней грани являются понятия *нижней границы* и *нижней грани*. Нижнюю грань называют также *инфимумом*. Нижнюю грань подмножества S в подмножестве $T \subseteq P$ обозначают символом $\inf_T S$ или символом $\inf S$ в случае, когда $T = P$. Двойственным образом устанавливается, что $\inf \varnothing$ существует тогда и только тогда, когда P содержит наименьший элемент l и что $\inf \varnothing = 1$.

Определение 8 [6]. Решеткой (или структурой) называется ч. у. множество, в котором каждое двухэлементное подмножество имеет нижнюю и верхнюю грани.

Определение 9 [6]. Полной решеткой называется ч. у. множество, в котором каждое подмножество имеет нижнюю и верхнюю грани.

Из этих определений следует, что любая полная решетка является решеткой. Но не наоборот.

Определение 9 [6]. Решеткой (или структурой) называется непустое множество L с определенными на нем двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, удовлетворяющими следующим условиям:

1. $\forall\ a \in L\ a \wedge a = a, a \vee a = a$ (идемпотентность);

2. $\forall\, a, b \in L\ a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a$ (коммутативность);

3. $\forall\, a, b, c \in L\quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (ассоциативность);

4. $\forall\, a, b \in L\ a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$ (поглощения).

Свойства решеток.

Лемма 1 [6]. Во всякой решетке $(L, \wedge, \vee)$ операции объединения и пересечения удовлетворяют условию изотонности: если $a \le b$, то $a \wedge c \le c \wedge b$ и $a \vee c \le c \vee b$.

Лемма 2 [6]. Во всякой решетке $(L, \wedge, \vee)$ выполняются следующие неравенства дистрибутивности:

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \wedge (b \vee c)$;

$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Лемма 3. Во всякой решетке $(L, \wedge, \vee)$выполняется неравенство модулярности: если $a \le c$, то $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$.

1.5. Диаграммы решеток

Назовем элементы a и b ч.у. множества $(P, \le)$ *сравнимыми*, если $a \le b$ или $b \le a$. Будем говорить, что элемент b покрывает элемент a, если выполнены следующие условия: 1) $a < b$; 2) $\forall c \in P\ ((a \le c) \wedge (c \le b) \to (c = a) \vee (c = b))$. Если b покрывает a, то будем записывать это кратко так: $a \prec b$.

В ряде случаев ч.у. множество может быть наглядно изображено в виде диаграммы на плоскости. Для того чтобы изобразить ч.у. множество $(P, \le)$ в виде диаграммы, примем следующие соглашения:

1. Различные элементы множества P изображаются различными точками плоскости;

2. если $a, b \in P$ и b покрывает a, то точки, изображающие эти элементы, соединяются отрезком, причем точка, соответствующая b, располагается выше точки, соответствующей a.

Понятно, что диаграмма может быть построена полностью лишь в том случае, когда ч.у. множество P конечно. Однако при этом она может быть достаточно сложной и потому бесполезной. Очевидно также и то, что при построении диаграммы ее отрезки могут пересекаться в точках, не изображающих элементы множества P. Диаграмма, содержащая минимальное число таких пересечений, называется *оптимальной*, а не содержащая их совсем – *плоской*.

Пример 5. *P = (M, ≤), где M = {1, 2, 5, 7}* (рис.1);

Пример 6. *S = (M, |), где M = {2, 3, 4, 6, 12}* (рис.2).

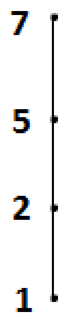

Рис.1

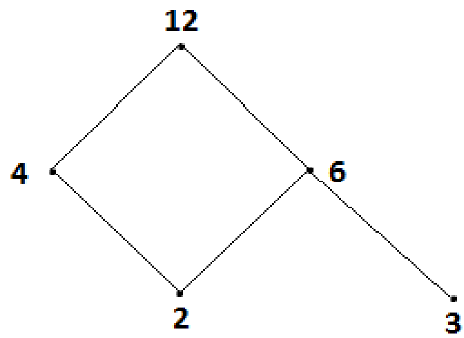

Рис.2

1.6. Алгебраические элементы колец

Любая алгебра является кольцом с операциями сложения (+) и умножения (*). $A = (A, +, *, \times), P -$ поле, $P = GF(2) = \{0, 1\}$.

Определение 10 [9]. Элемент e кольца K называется идемпотентным элементом, если $e^2 = e$.

Пример 7. Единица $-$ в кольце Z.

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 11 [9]. Элемент r кольца K называется нильпотентным, если $\exists\, n \in \mathrm{N}: r^n = 0$. Наименьший n с таким свойством называется индексом нильпотентности элемента n ($indr = n$).

Пример 8. $0^2 = 0, ind\ 0 = 1$.

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$ind\ r = 2.$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, m^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ind\ m = 3.$$

Определение 12 [9]. Элемент a кольца K называется алгебраическим, если существует многочлен положительной степени $f(x)$ с целым коэффициентом, то есть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x$ такой, что $f(a) = 0$.

1.7. Пирсовские разложения колец

Пусть K – коммутативное кольцо, e – ненулевой идемпотентный элемент.

Определим два множества:

1) $eK = \{ex | x \in K\} \neq \emptyset$

2) $(1-e)K = \{x - ex | x \in K\} \neq \emptyset$

Докажем, что eK и $(1-e)K$ – подкольца в K.

Признак подкольца:

1. $\forall a, b \in S\ \big((a-b) \in S\big)$

2. $\forall a, b \in S\ (ab \in S)$

Пусть $S = eK, a = ex_1, b = ex_2$.

1) $a - b = e(x_1 - x_2) \in eK$

2) $ab = ex_1 ex_2 = e^2 x_1 x_2 = e(ex_1 x_2) \in eK$

Пусть $S = (1-e)K, a = (1-e)x_1, b = (1-e)x_2$.

1) $a - b = x_1 - x_2 - e(x_1 - x_2) = (1-e)(x_1 - x_2) \in (1-e)K$

2) $ab = (1-e)x_1(1-e)x_2 = (1-e)((1-e)x_1 x_2) \in (1-e)K$

$$eK + (1-e)K = K - \text{докажем это:}$$

Пусть $x \in K$. Тогда $x = ex + (1-e)x = ex + x - ex = x$.

Значит $K \subseteq eK + (1-e)K$. Так как $eK, (1-e)K \subseteq K$, то $eK + (1-e)K = \{ex + (1-e)y = ex + y - ey | x, y \in K\} \subseteq K$.

Убедимся в том, что $eK \cap (1-e)K = \{0\}$.

Пусть $a \in eK \cap (1-e)K$. Тогда $\exists\, x, y \in K$такие, что

$$a = ex = (1-e)y$$

$$ea = e(ex) = e(1-e)y = e(y - ey) = ey - ey = 0 \Rightarrow a = 0$$

Обозначим $eK + (1-e)K = eK \bigoplus (1-e)K$ – прямая сумма двух подколец.

Таким образом: $K = eK \bigoplus (1-e)K$ – пирсовское разложение кольца K по идемпотенту e. Легко видеть, что $\forall a \in eK\ ea,$ то есть e – единичный элемент в подкольце eK. Аналогично $\forall c \in (1-e)K ec = 0$. Значит, если $x \in eK$, а $y \in (1-e)K$, то $e(x+y) = x \Rightarrow xy = 0$.

Пусть K – некоммутативное кольцо, e – идемпотентный элемент. Тогда, если e – не единица, от имеет место двустороннее пирсовское разложение:

$$K = eKe \bigoplus eK(1-e) \bigoplus (1-e)Ke \bigoplus (1-e)K(1-e),$$

$$eKe \in a, eK(1-e) \in b, (1-e)Ke \in c, (1-e)K(1-e)d,$$

$$ba = 0, ab \in eK(1-e),$$

$$ac = 0, ca \in (1-e)Ke,$$

$$ad = da = 0,$$

$$b^2 = 0, c^2 = 0.$$

S – трехмерные. $S =< a_1, a_2, a_3 >, a_{1,} a_2, a_3 -$ базис. $\forall a \in S\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{0,1\}$ $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. $S =< e_1, e_2, r >, e_i^2 = e_i, r^2 = 0$

$$e_1 r = r, re_1 = 0, e_2 r = 0, re_2 = r, e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0.$$

ГЛАВА II. **Система компьютерной алгебры GAP**

2.1. Общая характеристика пакета GAP

GAP [13] - свободно распространяемая, открытая и расширяемая система компьютерной алгебры, название которой означает "Groups, Algorithms and Programming". Является системой компьютерной алгебры, задуманной как инструмент вычислительной теории групп, и впоследствии распространившейся на смежные разделы алгебры. В настоящее время **GAP** является уникальным всемирным совместным научным проектом, объединяющим специалистов в области алгебры, теории чисел, математической логики, информатики и др. наук из различных стран мира. Разработка системы была начата в 1986 г. Первоначально **GAP** разрабатывался в г. Аахен, Германия (Lehrstuhl D fur Mathematik, RWTH). В настоящее время центр разработки GAP и технической поддержки его пользователей находится в Шотландии (School of Mathematical and Computational Sciences, University of St.-Andrews).

Основные особенности GAP:

- язык программирования, внешне напоминающий Паскаль;
- стандартные типы основных алгебраических объектов: групп (подстановок, абстрактных, матричных), колец, полей;
- удобные типы переменных, в т.ч. оперативно изменяемые списки и записи;
- более 4 тысяч библиотечных функций;
- обширная библиотека данных, включая практически все группы, порядок которых не превосходит 1000;
- прикладные программы, поставляемые вместе с **GAP**, охватывают такие разделы алгебры, как комбинаторная теория групп, конечные простые группы, теория представлений групп, теория графов, в т.ч. их группы автоморфизмов, теория кодирования, кристаллографические группы, группы Галуа и многое другое;

- подробное и удобное описание (около 1600 стр.) в формате «гипертекст»;
- бесплатное получение по сети Internet вместе с исходными текстами, являющимися незаменимым наглядным пособием для освоения GAP;
- работа в операционных системах DOS, Windows, Unix, Linux, MacOS;
- работа с процессором типа 386 и выше с ОЗУ от 8 Mb;
- занимаемое место на диске - от 10 до 100 Mb в зависимости от объема инсталляции;
- способность работать с ОЗУ до 128 Mb и файлом подкачки до 128 Mb.

GAP дает возможность производить вычисления с гигантскими целыми и рациональными числами, допустимые значения которых ограничены только объемом доступной памяти. Далее, система работает с конечными полями, многочленами от многих переменных, рациональными функциями, векторами и матрицами. Пользователю доступны различные комбинаторные функции, элементарные теоретико-числовые функции, разнообразные функции для работы с множествами и списками.

Группы могут быть заданы в различной форме, например, как группы подстановок, матричные группы, группы, заданные порождающими элементами и определяющими соотношениями. Более того, построив, например, групповую алгебру, можно вычислить ее мультипликативную группу, и даже задать ее подгруппу, порожденную конкретными обратимыми элементами групповой алгебры. Ряд групп может быть задан непосредственным обращением к библиотечным функциям (например, симметрическая и знакопеременная группы, группа диэдра, циклическая группа и др.).

Функции для работы с группами включают определение порядка группы, вычисление классов сопряженных элементов, центра и коммутанта группы, верхнего и нижнего центрального рядов, ряда коммутантов, Силовских подгрупп, максимальных подгрупп, нормальных подгрупп, решеток подгрупп, групп автоморфизмов, и т.д. Для ряда конечных групп доступно определение их типа изоморфизма.

Теория представлений групп также входит в область применения системы GAP. Здесь имеются инструменты для вычисления таблиц характеров конкретных групп, действий над характерами и интерактивного построения таблиц характеров, определения теоретико-групповых свойств на основании свойств таблицы характеров группы. Модулярные представления групп (т.е. представления над полем, характеристика которого делит порядок группы) также могут быть исследованы с помощью **GAP**.

В версии 4.3, в которой были производены вычисления, были существенным образом расширены возможности для работы с векторными пространствами, алгебрами и модулями. В системе могут быть определены векторные пространства над всеми доступными полями и модули над всеми доступными кольцами. Имеются алгоритмы для вычисления структуры конечномерных алгебр Ли, которые могут быть, например, заданы структурными константами или порождающими элементами, вычисления различных их Лиевских подалгебр и идеалов.

2.2. Язык программирования GAP

Ключевые слова.

Ключевыми словами **GAP** являются следующие слова: and, do, elif, else, end, fi, for, function, if, in, local, mod, not, od, or, repeat, return, then, until, while, quit, QUIT, break, rec, continue.

Выражения.

Примерами выражений являются: переменные, обращения к функциям, целые числа, перестановки, строки, функции, списки, записи. С помощью операторов из них могут быть составлены более сложные выражения. Операторы разбиты на три класса:

- операторы сравнения: =, <>, <, <=, >, >=, in;
- арифметические операторы: +, -, *, /, mod, ^;
- логические операторы: not, and, or.

Пример 1:

gap>2*2;; #два знака ";" подавляют вывод на экран

gap>2*2+9=Fibonacci(7) and Fibonacci(13) in Prime;

true

Сравнения выражений

Формат:

left-expr = right-expr

left-expr<>right-expr

Примечание: любые объекты сравнимы между собой. Объекты различных типов всегда различны, т.е. = приведет к false, и <> — к true. Кроме того, для них определено отношение «меньше».

Операторы сравнения имеют больший приоритет по сравнению с логическими операторами, но меньший по сравнению с арифметическими. Например, a*b = c and d интерпретируется как ((a*b)=c) and d). Еще один пример (сравнение, левая часть которого является выражением):

gap> 2 * 2 + 9 = Fibonacci(7);

true

Арифметические операции

Формат:

+ right-expr

- right-expr

eft-expr + right-expr

left-expr - right-expr

left-expr * right-expr

eft-expr / right-expr

left-expr mod right-expr

left-expr ^ right-expr

Значение, как правило, зависит от типа операндов. Mod определен только для целых и рациональных чисел. Для элемента группы ^ означает возведение в степень, если правый операнд - целое число, а если он — также элемент группы, то сопряжение с его помощью. Приоритет операторов (по убыванию):

3) ^
4) унарные + и -
5) *, /, mod
6) + и -

Пример: -2 ^ -2 * 3 + 1 означает (-(2 ^ (-2)) * 3) + 1 .

Арифметические операторы имеют наивысший приоритет по сравнению с операторами сравнения и логическими операторами.

Команда присваивания.

Присваивания имеют формат

```
var := expr;
```

Команда вызова процедуры.

Формат:

```
procedure-var();
procedure-var(arg-expr {, arg-expr} );
```

Различие между процедурами и функциями введено для удобства, **GAP** же их не различает. Функция возвращает значение, но не производит побочных эффектов. Процедура не возвращает никакого значения, но производит какое-либо действие (например, процедуры Print, Append, Sort).

Команда IF.

Формат:

```
if bool-expr1 then statements1
{ elif bool-expr2 then statements2 }
[ else statements3 ]
fi;
```

При этом частей elif может быть произвольное количество или ни одной. Часть else также может отсутствовать.

Функции.

Формат:

```
function ( [ arg-ident {, arg-ident} ] )
[ localloc-ident {, loc-ident} ; ]
 Statements
end
```

Пример функции, которая определяет n-е число Фибоначчи:

```
gap>fib := function ( n )
>local f1, f2, f3, i;
>f1 := 1;  f2 := 1;
>fori  in [3..n]  do
>f3 := f1 + f2; f1 := f2; f2 := f3;
>od;
> return f2;
>end;;
gap>List( [1..10], fib );
[ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ]
```

2.3. Команды для вычислений в алгебрах

Пусть F — поле и A — алгебра над F (кратко: A — F - алгебра). Все алгебры в GAPе ассоциативны, то есть операция умножения в них ассоциативна. Любая алгебра всегда содержит нулевой элемент, который может быть получен вычитанием произвольного элемента из самого себя. Элементы поля F не рассматриваются как элементы A. Практическим обоснованием (очевидно и математическим тоже) для этого служит то, что даже если единичная матрица содержится в матричной алгебре A, все равно невозможно записать $1 + a$ для суммы единичной матрицы и элемента a алгебры A, так как независимо от алгебры A в **GAP**е уже определено это значение как прибавление 1 ко всем позициям матрицы a. Вместо этого необходимо писать

One(A) + a или

aˆ0 + a.

Родительские алгебры и подалгебры

GAP различает алгебры и подалгебры алгебр.

Каждая подалгебра принадлежит уникальной основной алгебре, которую называют родителем подалгебры. Родительская алгебра — собственный родитель. Родительские алгебры конструируются при помощи операторов Algebra и UnitalAlgebra, подалгебры конструируются при помощи операторов Subalgebra и UnitalSubalgebra. Родитель первого аргумента оператора Subalgebra будет родителем созданной подалгебры. Алгебраические действия, совершаемые более, чем с одной алгеброй, предполагают, что аргументы имеют общего родителя. Возьмем, например, Centralizer. В этом случае должно быть два аргумента: алгебра A и алгебра B, где A родительская алгебра и B — подалгебра этой родительской алгебры, или A и B — подалгебры общей родительской алгебры P. В этих случаях Centralizer выдает централизатор B в A, который представлен как подалгебра общей родительской алгебры алгебр A и B. Заметим, что подалгебра родительской алгебры не должна быть собственной подалгеброй. Исключением этому правилу является теоретико-множественная функция Intersection, которая позволяет рассматривать пересечения алгебры с различными родительскими алгебрами. Всякий раз, когда имеется две подалгебры, которые имеют различные родительские алгебры, но имеют и общую супералгебру A, можно использовать

AsSubalgebra или AsUnitalSubalgebra для того, чтобы создать новые подалгебры, которые имеют общую родительскую алгебру *A*.

Теоретико-множественные функции для алгебр

Все теоретико-множественные функции, например, Intersection и Size могут быть применены к алгебрам, так как они являются областями. Все теоретико-множественные функции, не упомянутые здесь, не трактуются специально для алгебр.

Elements (A) вычисляет элементы алгебры *A* с использованием алгоритма Dimino. Заданная по умолчанию для алгебр функция вычисляет базис линейного пространства в то же самое время.

Intersection (A, H) выдает пересечение *A* и *H* в виде множества элементов или как алгебраическую запись (запись алгебры).

IsSubset (A, H)

Если *A* и *H* — алгебры, то IsSubset проверяет являются ли генераторы *H* элементами *A*. Другой способ состоит в применении DomainOps.IsSubset.

Random(A) выдает произвольный элемент алгебры *A*. Это требует вычисления базиса линейного пространства.

Проверка свойств алгебр

С помощью GAPа могут быть проверены следующие свойства алгебр.

IsAbelian(A) выдается true если алгебра *A* абелева и false в противном случае. Алгебра *A* называется абелевой, если и только, если для любых $a, b \in A$ $a*b = b*a$.

IsCentral (A, U) выдает true если алгебра *A* централизует алгебру *U* и false в противном случае. Алгебра *A* централизует алгебру *U*, если и только, если для всякого $a \in A$ и для всякого $u \in U$ $a*u = u*a$. Заметьте, что *U* не обязана быть подалгеброй *A*, но они должны иметь общую родительскую алгебру.

IsFinite (A) выдает true если алгебра *A* конечна, и false в противном случае.

IsTrivial (A) выдает true если алгебра A состоит только из нулевого элемента, и false в противном случае. Если A — унитальная алгебра, то, конечно, она никогда не тривиальна.

Все критерии ожидают родительскую алгебру или подалгебру и выдают true, если алгебра имеет свойство и false в противном случае. Некоторые функции не могут выполниться, если данная алгебра имеет бесконечное множество элементов. В таких случаях может быть напечатано предупреждение.

Функции линейного пространства для алгебр

Конечномерная F - алгебра A всегда есть конечномерное векторное пространство над F. Таким образом, в **GAP**е, алгебра — линейное пространство, и функции линейного пространства типа Base и Dimension применимы к алгебрам.

Структура линейного пространства используется также теоретико-множественными функциями.

Алгебраические функции для алгебр

Функции, описанные в этом разделе, вычисляют некоторые подалгебры данной алгебры, например, Centre вычисляет центр алгебры. Некоторые функции не могут завершиться, если данная алгебра имеет бесконечное множество элементов, в то время как другие функции могут сообщить об ошибке в таких случаях.

В **GAP**е каждая алгебра является или родительской алгеброй или подалгеброй единственной родительской алгебры. Если Вы вычисляете центр C алгебры U с родительской алгеброй A, то C — подалгебра U, но ее родительская алгебра есть A.

ГЛАВА III. **Типовая классификация трехмерных подалгебр алгебры матриц M(GF(2),3)**

3.1. Трехмерные подалгебры алгебры матриц над полем из двух элементов

Теорема 1. *В алгебре квадратных матриц третьего порядка над полем из двух элементов содержится 736 трехмерных подалгебры.*

Доказать эту теорему можно при помощи программы, написанной в **GAP**, которая считает количество подалгебр трехмерных алгебр над полем из двух элементов:

Программа № 1		
№	Текст программы	Комментарии
1	`Ssub:=[];`	Создаем массив
2	`Sub:=[];b:=0;`	Создание массива sub и переменной b
3	`A:=MatAlgebra(GF(2),3);`	Построение алгебры матриц третьего порядка над полем GF(2)
4	`El:=Elements(A);`	Создание массива элементов алгебры A
5	`for i in [1..512] do`	Начало цикла
6	`for k in [i..512] do`	Начало цикла
7	`for j in [k..512] do`	Начало цикла
8	`B:=Subalgebra (A,[El[i],El[k],El[j]]);`	Записывает подалгебру алгебры A порожденную элементами El[i],El[k],El[j] в B
9	`sub:=Elements(B);`	Кладем в массивsub элементы подалгебры B
10	`If Size(sub)=8 then`	Проверяем размер массива sub. Если равен 8
11	`AddSet(Sub,sub);`	То записываем его в массив Sub

12	`if Size(Sub) > b then`	Сравниваем размер массива Subc b. Если размер больше
13	`Add(Ssub,[i,k,j]);`	То записываем в массив E1E2E2RRE10
14	`b:=Size(Sub);`	Присваиваем b размер массиваsub
15	`fi;`	Конец цикла
16	`fi;`	Конец цикла
17	`od;`	Конец цикла
18	`od;`	Конец цикла
19	`od;`	Конец цикла
20	`PrintTo("trehm_pod1.dan","Ssub:=",Ssub,";","\n","|Ssub|=",Size(Ssub),"\n");`	Печатаем массив Ssub в файл trehm_pod1.dan

Теорема 2. *В алгебре квадратных матриц третьего порядка над полем из двух элементов содержится 736 трехмерных подалгебры, которые образуют 9 различных типов подалгебр.* Их описание приведено в следующей таблице:

Таблица №2

№	Тип решетки	Число подалгебр в подалгебре данного типа	Моногенные	Количество подалгебр данного типа	Количество подалгебр данной размерности
1	(1,1,1)	3	+	8	
2	(1,2,2,1)	6	+	21	
3	(1,3,2,1)	7	+	28	
4	(1,4,4,1)	10	-	98	736
5	(1,5,3,1)	10	-	21	
6	(1,5,4,1)	11	-	168	
7	(1,6,5,1)	13	-	336	

8	(1,7,6,1)	15	-	28	
9	(1,7,7,1)	16	-	28	

Доказательство данной теоремы приводится в дипломной работе Гришиной А.А. Подалгебры матричной алгебры $M_3(GF(2))$.

Теорема 3. *В алгебре квадратных матриц третьего порядка над полем из двух элементов содержится всего 679 немоногенных трехмерных подалгебры, которые образуют 6 попарно различных типов подалгебр*. Их полное описание приведено в следующей таблице:

Таблица №3

№	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
1	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = r e_2 = r$	84	(1,4,4,1)
2	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = r_2 = r_2 e$	14	(1,4,4,1)
3	r_1, r_2	$r_1^3 = 0, r_1^2 \neq 0, r_2^2 = 0, r_1 r_2 = r_1^2$, $r_2 r_1 = 0$	21	(1,5,3,1)
4	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = 0$, $e r_2 = r_2, r_2 e = 0$	42	(1,5,4,1)
5	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = 0$, $e r_2 = 0, r_2 e = r_2$	42	(1,5,4,1)
6	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = r_2, r_2 e = 0$	42	(1,5,4,1)
7	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = 0, r_2 e = r_2$	42	(1,5,4,1)

8	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = 0, r e_2 = r$	84	(1,6,5,1)
9	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = r, r e_2 = 0$	84	(1,6,5,1)
10	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_2 r = r e_1 = 0, e_1 r = r = r e_2$	168	(1,6,5,1)
11	e_1, e_2, e_3	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$	28	(1,7,6,1)
12	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_i = 0$, $r_i e = r_i$	14	(1,7,7,1)
13	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, r_i e = 0$, $e r_i = r_i$	14	(1,7,7,1)
		ИТОГО:	679	6

Теорема 4. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 4, 4, 1), когда S изоморфна одной из следующих подалгебр:*

Таблица №4

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_1	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = r e_2 = r$	84	(1,4,4,1)
S_2	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_1 = r_1 e = r_1$, $e r_2 = r_2 = r_2 e$	14	(1,4,4,1)

Доказательство можно провести с помощью следующей программы:

Программа № 2		
№	Текст программы	Комментарии

1	EER0R:=[];	Создаем массив
2	Sub:=[];b:=0;	Создание массива sub и переменной b
3	NI:=[3, 5, 7, 9, 28, 33, 37, 41, 64, 65, 73, 129, 131, 193, 220, 326, 366, 433, 439, 456, 505];	Массив номеров 2-нильпотентных матриц
4	ID:=[2, 4, 6, 8, 10, 17, 18, 19, 22, 25, 46, 49, 50, 54, 55, 57, 66, 74, 82, 122, 145, 146, 147, 152, 196, 210, 217, 239, 257, 258, 260, 261, 266, 273, 274, 275, 277, 279, 281, 289, 290, 293, 296, 298, 317, 321, 337, 345, 361, 385, 386, 388, 391, 449, 458, 467, 512];	Массив номеров идемпотентных матриц
5	A:=MatAlgebra(GF(2),3);	Построение алгебры матриц третьего порядка над полем GF(2)
6	El:=Elements(A);	Создание массива элементов алгебры A
7	for i in ID do	Начало цикла
8	for k in ID do	Начало цикла
9	for j in NI do	Начало цикла
10	if El[i]*El[k]=El[1] and El[k]*El[i]=El[1]	Условия
11	and El[i]*El[j]=El[1] and El[j]*El[i]=El[1]	
12	and El[j]*El[k]=El[j] and El[k]*El[j]=El[j]	
13	then	
14	B:=Subalgebra (A,[El[i],El[k],El[j]]);	Записывает подалгебру алгебры A порожденную элемента-миEl[i],El[k],El[j] вB

<table>
<tr><td>15</td><td>sub:=Elements(B);</td><td>Кладем в массивsub элементы подалгебры B</td></tr>
<tr><td>16</td><td>ifSize(sub)=8 then</td><td>Проверяем размер массива sub. Если равен 8</td></tr>
<tr><td>17</td><td>AddSet(Sub,sub);</td><td>То записываем его в массив Sub</td></tr>
<tr><td>18</td><td>if Size(Sub) > b then</td><td>Сравниваем размер массива Subc b. Если размер больше</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Add(E1E2E2RRE10,[i,k,j]);</td><td>То записываем в массив E1E2E2RRE10</td></tr>
<tr><td>20</td><td>b:=Size(Sub);</td><td>Присваиваем b размер массиваsub</td></tr>
<tr><td>21</td><td>fi;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>22</td><td>fi;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>23</td><td>fi;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>24</td><td>od;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>25</td><td>od;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>26</td><td>od;</td><td>Конец цикла</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Sort(EER0R);</td><td>Упорядочиваем элементы массива EER0R</td></tr>
<tr><td>28</td><td>PrintTo
("3eer=0r.dan","EER0R:=",
EER0R,";","\n","|EER0R|=",Siz
e(EER0R),"\n");</td><td>Печатаем массив EER0R в файл 3eer=0r.dan</td></tr>
</table>

Замечание. Приведенная программа строит подалгебру S_1. Программа для построения подалгебры S_2 отличается в строках 10-12:

S_1	S_2
El[i]*El[k]=El[1] and El[k]*El[i]=El[1]	El[i]*El[k]=El[k] and El[k]*El[i]=El[k]
and El[i]*El[j]=El[1] and El[j]*El[i]=El[1]	and El[i]*El[j]=El[j] and El[j]*El[i]=El[j]
and El[j]*El[k]=El[j] and El[k]*El[j]=El[j]	and El[j]*El[k]=El[1] and El[k]*El[j]=El[1]

Результатами программ являются массивы номеров троек базисных элементов.

EER0R:= [[2, 273, 33], [2, 273, 129], [2, 273, 433], [4, 275, 37], [4, 275, 129], [4, 275, 439], [6, 277, 33], [6, 277, 131], [6, 277, 439], [8, 279, 37], [8, 279, 131], [8, 279, 433], [10, 281, 33], [10, 281, 193], [10, 281, 505], [17, 258, 5], [17, 258, 65], [17, 258, 326], [19, 260, 5], [19, 260, 193], [19, 260, 456], [25, 266, 37], [25, 266, 65], [25, 266, 366], [46, 317, 33], [46, 317, 220], [46, 317, 456], [49, 290, 5], [49, 290, 73], [49, 290, 366], [55, 296, 5], [55, 296, 220], [55, 296, 505], [57, 298, 37], [57, 298, 73], [57, 298, 326], [66, 337, 41], [66, 337, 129], [66, 337, 505], [74, 345, 41], [74, 345, 193], [74, 345, 433], [145, 386, 7], [145, 386, 65], [145, 386, 456], [147, 388, 7], [147, 388, 193], [147, 388, 326], [196, 467, 64], [196, 467, 129], [196, 467, 366], [217, 458, 64], [217, 458, 65], [217, 458, 439], [257, 18, 3], [257, 18, 9], [257, 18, 28], [261, 22, 3], [261, 22, 41], [261, 22, 64], [289, 50, 7], [289, 50, 9], [289, 50, 64], [293, 54, 7], [293, 54, 28], [293, 54, 41], [321, 82, 9], [321, 82, 131], [321, 82, 220], [361, 122, 9], [361, 122, 439], [361, 122, 456], [385, 146, 3], [385, 146, 73], [385, 146, 220], [391, 152, 3], [391, 152, 366], [391, 152, 505], [449, 210, 28], [449, 210, 73], [449, 210, 131], [512, 239, 28], [512, 239, 326], [512, 239, 433]];

|EER0R|=84

ERRR:= [[274, 3, 5], [274, 3, 129], [274, 5, 33], [274, 7, 433], [274, 9, 33], [274, 9, 65], [274, 28, 37], [274, 28, 193], [274, 41, 326], [274, 64, 456], [274, 65, 129], [274, 73, 433], [274, 131, 326], [274, 220, 366]];

|ERRR|=14

Доказательство следующих теорем осуществляется с помощью программ, аналогичных программе № 2. Отличия этих программ состоят в блоках, задающих умножения в соответствующей алгебре.

Теорема 5. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 5, 3, 1), когда S изоморфна следующей подалгебре* S_3*:*

Таблица №5

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_3	r_1, r_2	$r_1^3 = 0, r_1^2 \neq 0, r_2^2 = 0, r_1r_2 = r_1^2,$ $r_2r_1 = 0$	21	(1,5,3,1)

Получен результат в виде массива номеров троек базисных элементов.

RR:= [[13, 5], [32, 5], [35, 33], [67, 3], [79, 7], [92, 28], [97, 65], [120, 64], [133, 129], [137, 9], [171, 41], [190, 64], [222, 7], [229, 193], [244, 41], [328, 3], [334, 326], [375, 28], [435, 433], [441, 9], [477, 456]];

|RR|=21

Теорема 6. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 5, 4, 1), когда S изоморфна одной из следующих подалгебр:*

Таблица №6

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_1	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = 0,$ $er_2 = r_2, r_2e = 0$	42	(1,5,4,1)
S_2	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = 0,$ $er_2 = 0, r_2e = r_2$	42	(1,5,4,1)
S_3	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = r_1,$ $er_2 = r_2, r_2e = 0$	42	(1,5,4,1)
S_4	r_1, r_2, e	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = r_1,$ $er_2 = 0, r_2e = r_2$	42	(1,5,4,1)

Результатами программ являются массивы номеров троек базисных элементов.

RER0RER:= [[3, 257, 5], [3, 385, 7], [5, 17, 3], [5, 49, 7], [7, 145, 3], [7, 289, 5], [9, 257, 33], [9, 321, 41], [28, 257, 37], [28, 449, 64], [33, 2, 9], [33, 6, 41], [37, 4, 28], [37, 8, 64], [41, 66, 9], [41, 261, 33], [64, 196, 28], [64, 261, 37], [65, 17, 129], [65, 25, 193], [73, 49, 433], [73, 57, 505], [129, 2, 65], [129, 4, 193], [131, 6, 326], [131, 8, 456], [193, 10, 65], [193, 19, 129], [220, 46, 366], [220, 55, 439], [326, 17, 131], [326, 57, 456], [366, 25, 220], [366, 49, 439], [433, 2, 73], [433, 8, 505], [439, 4, 220], [439, 6, 366], [456, 19, 131], [456, 46, 326], [505, 10, 73], [505, 55, 433]];

|RER0RER|=42

RERRRE0:= [[3, 257, 129], [3, 261, 131], [5, 17, 33], [5, 19, 37], [7, 145, 433], [7, 147, 439], [9, 257, 65], [9, 289, 73], [28, 257, 193], [28, 293, 220], [33, 2, 5], [33, 10, 37], [37, 4, 5], [37, 25, 33], [41, 66, 326], [41, 74, 366], [64, 196, 456], [64, 217, 505], [65, 17, 9], [65, 145, 73], [73, 49, 9], [73, 385, 65], [129, 2, 3], [129, 66, 131], [131, 6, 3], [131, 321, 129], [193, 10, 28], [193, 74, 220], [220, 46, 28], [220, 321, 193], [326, 17, 41], [326, 147, 366], [366, 25, 41], [366, 196, 326], [433, 2, 7], [433, 74, 439], [439, 4, 7], [439, 217, 433], [456, 19, 64], [456, 145, 505], [505, 10, 64], [505, 66, 456]];

|RERRRE0|=42

ER1R1ER1R2e0:= [[18, 3, 5], [18, 9, 33], [18, 28, 37], [22, 41, 33], [22, 64, 37], [50, 7, 5], [82, 9, 41], [82, 131, 326], [82, 220, 366], [122, 439, 366], [122, 456, 326], [146, 3, 7], [146, 73, 433], [146, 220, 439], [152, 366, 439], [152, 505, 433], [210, 28, 64], [210, 73, 505], [210, 131, 456], [239, 326, 456], [239, 433, 505], [258, 5, 3], [258, 65, 129], [258, 326, 131], [260, 193, 129], [260, 456, 131], [266, 37, 28], [266, 65, 193], [266, 366, 220], [273, 33, 9], [273, 129, 65], [273, 433, 73], [275, 129, 193], [275, 439, 220], [277, 33, 41], [279, 37, 64], [

281, 193, 65], [281, 505, 73], [290, 5, 7], [337, 41, 9], [386, 7, 3], [458, 64, 28]];

|ER1R1ER1R2e0|=42

ER1R1ER1:= [[18, 3, 129], [18, 9, 65], [18, 28, 193], [22, 3, 131], [22, 41, 326], [22, 64, 456], [50, 7, 433], [50, 9, 73], [50, 64, 505], [54, 7, 439], [54, 28, 220], [54, 41, 366], [82, 131, 129], [82, 220, 193], [122, 439, 433], [122, 456, 505], [146, 73, 65], [152, 366, 326], [152, 505, 456], [239, 326, 366], [239, 433, 439], [258, 5, 33], [258, 65, 9], [258, 326, 41], [260, 5, 37], [260, 193, 28], [260, 456, 64], [266, 37, 33], [266, 366, 41], [273, 33, 5], [273, 129, 3], [273, 433, 7], [275, 37, 5], [275, 439, 7], [277, 131, 3], [281, 33, 37], [281, 505, 64], [290, 73, 9], [296, 220, 28], [337, 129, 131], [345, 193, 220], [386, 65, 73]];

|ER1R1ER1|=42

Теорема 7. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 6, 5, 1), когда S изоморфна одной из следующих подалгебр:*

Таблица №7

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_1	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = 0, r e_2 = r$	84	(1,6,5,1)
S_2	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_1 r = r e_1 = 0, e_2 r = r, r e_2 = 0$	84	(1,6,5,1)
S_3	e_1, e_2, r	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$, $e_2 r = r e_1 = 0, e_1 r = r = r e_2$	168	(1,6,5,1)

Результатами программ являются массивы номеров троек базисных элементов.

E1E2E2RRE10:= [[2, 17, 3], [2, 49, 7], [2, 145, 3], [2, 257, 5], [2, 273, 3], [2, 273, 5], [2, 273, 7], [2, 289, 5], [2, 385, 7], [4, 55, 7], [4, 257, 5], [4, 275, 5], [4, 275, 7], [4, 293, 5], [4, 385, 7], [6, 17, 3], [6, 147, 3], [6, 277, 3], [10, 25, 28], [10, 57, 64], [10, 217, 28], [10, 257, 37], [10, 281, 28], [10, 281, 37], [10, 281, 64], [10, 289, 37], [10, 449, 64], [17, 2, 9], [17, 6, 41], [17, 66, 9], [17, 257, 33], [17, 258, 9], [17, 258, 33], [17, 258, 41], [17, 261, 33], [17, 321, 41], [18, 257, 5], [18, 257, 33], [18, 257, 37], [19, 8, 64], [19, 257, 37], [19, 260, 37], [19, 260, 64], [19, 261, 37], [19, 449, 64], [22, 261, 33], [22, 261, 37], [25, 46, 41], [25, 257, 33], [25, 266, 33], [25, 266, 41], [25, 293, 33], [25, 321, 41], [46, 25, 28], [46, 196, 28], [46, 317, 28], [49, 2, 9], [49, 74, 9], [49, 290, 9], [50, 289, 5], [66, 17, 131], [66, 57, 456], [66, 145, 131], [66, 321, 326], [66, 337, 131], [66, 337, 326], [66, 337, 456], [66, 361, 326], [66, 449, 456], [74, 25, 220], [74, 49, 439], [74, 217, 220], [74, 321, 366], [74, 345, 220], [74, 345, 366], [74, 345, 439], [74, 361, 366], [74, 385, 439], [82, 321, 41], [82, 321, 326], [82, 321, 366], [122, 361, 326], [122, 361, 366], [145, 2, 73], [145, 8, 505], [145, 66, 73], [145, 385, 433], [145, 386, 73], [145, 386, 433], [145, 386, 505], [145, 391, 433], [145, 449, 505], [146, 385, 7], [146, 385, 433], [146, 385, 439], [147, 6, 366], [147, 321, 366], [147, 385, 439], [147, 388, 366], [147, 388, 439], [147, 391, 439], [152, 391, 433], [152, 391, 439], [196, 46, 326], [196, 321, 326], [196, 449, 456], [196, 467, 326], [196, 467, 456], [196, 512, 456], [210, 449, 64], [210, 449, 456], [210, 449, 505], [217, 55, 433], [217, 385, 433], [217, 449, 505], [217, 458, 433], [217, 458, 505], [217, 512, 505], [239, 512, 456], [239, 512, 505], [257, 2, 65], [257, 4, 193], [257, 10, 65], [257, 17, 129], [257, 18, 65], [257, 18, 129], [257, 18, 193], [257, 19, 129], [257, 25, 193], [258, 17, 3], [258, 17, 129], [258, 17, 131], [260, 19, 129], [260, 19, 131], [261, 17, 131], [261, 19, 131], [261, 22, 131], [266, 25, 28], [266, 25, 193], [266, 25, 220], [273, 2, 9], [273, 2, 65], [273, 2, 73], [275, 4, 193], [275, 4, 220], [277, 6, 41], [279, 8, 64], [281, 10, 65], [281, 10, 73], [289, 2, 73], [289, 10, 73], [289, 50, 73], [290, 49, 7], [293, 4, 220], [293, 25, 220], [293, 54, 220], [321, 17, 129], [321, 25, 193], [321, 82, 129], [321, 82, 193], [321, 147, 129], [321, 196, 193], [337, 66, 9], [385, 2, 65], [385, 74, 65], [385, 146, 65], [386, 145, 3], [458, 217, 28]];

|E1E2E2RRE10|=168

EER0RER:= [[2, 17, 129], [2, 49, 433], [2, 257, 33], [4, 19, 129], [4, 55, 439], [4, 257, 37], [6, 17, 131], [6, 49, 439], [6, 261, 33], [8, 19, 131], [8, 55, 433], [8, 261, 37], [10, 25, 193], [10, 57, 505], [10, 257, 33], [17, 2, 65], [17, 6, 326], [17, 257, 5], [19, 4, 193], [19, 8, 456], [19, 257, 5], [25, 10, 65], [25, 46, 366], [25, 257, 37], [46, 25, 220], [46, 57, 456], [46, 261, 33], [49, 2, 73], [49, 6, 366], [49, 289, 5], [55, 4, 220], [55, 8, 505], [55, 289, 5], [57, 10, 73], [57, 46, 326], [57, 261, 37], [66, 17, 129], [66, 57, 505], [66, 321, 41], [74, 25, 193], [74, 49, 433], [74, 321, 41], [145, 2, 65], [145, 8, 456], [145, 385, 7], [147, 4, 193], [147, 6, 326], [147, 385, 7], [196, 19, 129], [196, 46, 366], [196, 449, 64], [217, 10, 65], [217, 55, 439], [217, 449, 64], [257, 2, 9], [257, 4, 28], [257, 17, 3], [261, 6, 41], [261, 8, 64], [261, 17, 3], [289, 2, 9], [289, 8, 64], [289, 49, 7], [293, 4, 28], [293, 6, 41], [293, 49, 7], [321, 17, 131], [321, 25, 220], [321, 66, 9], [361, 49, 439], [361, 57, 456], [361, 66, 9], [385, 2, 73], [385, 4, 220], [385, 145, 3], [391, 6, 366], [391, 8, 505], [391, 145, 3], [449, 10, 73], [449, 19, 131], [449, 196, 28], [512, 46, 326], [512, 55, 433], [512, 196, 28]];

|EER0RER|=84

EERRRE0:= [[2, 17, 33], [2, 145, 433], [2, 257, 129], [4, 19, 37], [4, 147, 439], [4, 257, 129], [6, 17, 33], [6, 147, 439], [6, 261, 131], [8, 19, 37], [8, 145, 433], [8, 261, 131], [10, 25, 33], [10, 217, 505], [10, 257, 193], [17, 2, 5], [17, 66, 326], [17, 257, 65], [19, 4, 5], [19, 196, 456], [19, 257, 193], [25, 10, 37], [25, 74, 366], [25, 257, 65], [46, 25, 33], [46, 196, 456], [46, 293, 220], [49, 2, 5], [49, 74, 366], [49, 289, 73], [55, 4, 5], [55, 217, 505], [55, 293, 220], [57, 10, 37], [57, 66, 326], [57, 289, 73], [66, 17, 41], [66, 145, 505], [66, 321, 129], [74, 25, 41], [74, 217, 433], [74, 321, 193], [145, 2, 7], [145, 66, 456], [145, 385,

65], [147, 4, 7], [147, 196, 326], [147, 321, 193], [196, 19, 64], [196, 147, 366], [196, 321, 129], [217, 10, 64], [217, 74, 439], [217, 385, 65], [257, 2, 3], [257, 10, 28], [257, 17, 9], [261, 6, 3], [261, 17, 41], [261, 19, 64], [289, 2, 7], [289, 10, 64], [289, 49, 9], [293, 4, 7], [293, 25, 41], [293, 46, 28], [321, 17, 9], [321, 66, 131], [321, 74, 220], [361, 49, 9], [361, 66, 456], [361, 74, 439], [385, 2, 3], [385, 74, 220], [385, 145, 73], [391, 6, 3], [391, 145, 505], [391, 147, 366], [449, 10, 28], [449, 66, 131], [449, 145, 73], [512, 46, 28], [512, 196, 326], [512, 217, 433]];

|EERRRE0|=84

Теорема 8. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 7, 6, 1), когда S изоморфна следующей подалгебре:*

Таблица №8

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_1	e_1, e_2, e_3	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j$	28	(1,7,6,1)

Получен результат в виде массива номеров троек базисных элементов.

EEE0:= [[2, 17, 257], [2, 49, 289], [2, 145, 385], [4, 19, 257], [4, 55, 293], [4, 147, 385], [6, 17, 261], [6, 49, 293], [6, 147, 391], [8, 19, 261], [8, 55, 289], [8, 145, 391], [10, 25, 257], [10, 57, 289], [10, 217, 449], [17, 66, 321], [19, 196, 449], [25, 46, 293], [25, 74, 321], [46, 57, 261], [46, 196, 512], [49, 74, 361], [55, 217, 512], [57, 66, 361], [66, 145, 449], [74, 217, 385], [147, 196, 321], [361, 391, 512]];

|EEE0|=28

Теорема 9. *Подалгебра S алгебры A тогда и только тогда имеет тип решетки (1, 7, 7, 1), когда S изоморфна одной из следующих подалгебр:*

Таблица №9

Подалгебра	Порождающие элементы	Определяющие соотношения	Количество подалгебр	Тип решетки подалгебр
S_1	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_i = 0,$ $r_i e = r_i$	14	(1,7,7,1)
S_2	r_1, r_2, e	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, r_i e = 0,$ $e r_i = r_i$	14	(1,7,7,1)

Результатами программ являются массивы номеров троек базисных элементов.

ERR0RRER:= [[2, 9, 65], [4, 28, 193], [6, 41, 326], [8, 64, 456], [17, 3, 129], [18, 65, 129], [22, 131, 326], [49, 7, 433], [50, 73, 433], [54, 220, 366], [257, 5, 33], [258, 9, 33], [260, 28, 37], [273, 3, 5]];

|ERR0RRER|=14

ERRRRRE0:= [[2, 3, 5], [10, 28, 37], [17, 9, 33], [18, 5, 33], [66, 131, 326], [74, 220, 366], [82, 41, 326], [145, 73, 433], [146, 7, 433], [210, 64, 456], [257, 65, 129], [258, 3, 129], [266, 28, 193], [273, 9, 65]];

|ERRRRRE0|=14

3.2. Вычисление типов решеток подалгебр

Типы решеток подалгебр были найдены по следующей программе:

Программа № 3	
`tip:=function(a,b,c)`	Задаем функцию
`  Local`	Создаем локальные переменные

A, El, i, j, k, sub, tip, S, s, el, l;	Имена переменных
sub:=[];	Задаем пустой массив sub
tip:=[];	Задаем пустой массив tip
A:=MatAlgebra(GF(2),3);	Создание алгебры матриц
El:=Elements(A);	Построение массива элементов
S:=Subalgebra(A,[El[a],El[b],El[c]]);	Построение подалгебры
for i in S do	Начало цикла
for k in S do	Начало цикла
for j in S do	Начало цикла
s:=Subalgebra(A,[i,j,k]);	Построение подалгебры
AddSet(sub,Elements(s));	Построение массива элементов и добавление его в массив sub
od;	Закрытие цикла
od;	Закрытие цикла
od;	Закрытие цикла
for l in [1..Size(sub)] do	Начало цикла
Add(tip,Size(sub[l]));	Добавление порядка каждого элемента в массив tip
od;	Закрытие цикла
tip:=Collected(tip);	Считаем количество элементов каждого порядка и сохраняем их в tip
PrintTo("tip.txt","a= ",a,";", " b= ",b,";"," c= ",c,";","\n",tip);	Распечатываем результаты в файл tip.txt
end;;	Конец функции

На примере программы № 2 после запуска программы № 3 зададим в **GAP** тип одной из подалгебр, которые выдала первая программа: tip(2, 273, 33).

Программа распечатала [[1, 1], [2, 4], [4, 4], [8, 1]], где

[1, 1] – одна подалгебра порядка 1, то есть нулевая подалгебра;

[2, 4] – 4 подалгебры порядка 2;

[4, 4] – 4 подалгебры порядка 4;

[8, 1] – 1 подалгебра порядка 8.

Полученную последовательность пар можно переписать и в таком виде (1, 4, 4, 1).

С помощью данной программы вычисляется тип подалгебры для каждого определяющего соотношения.

3.3. Выяснение отношения покрытия на множестве подалгебр

Для построения решеток выясняем отношение покрытия с помощью следующей программы:

Программа № 4	
`pokr:=function(a,b,c)`	Задание функции
`local`	Задание переменных
`A, El, i, j, k, sub, tip, S, s, s1, el, l, l1, m, m1, n, n1, i1;`	Имена переменных
`sub:=[];`	Создаем массив sub
`for i1 in [1..9] do`	Начало цикла
`sub[i1]:=[];`	Создаем в массиве sub 9 пустых массивов
`od;`	Конец цикла
`pokr:=[];`	Создание массива pokr
`A:=MatAlgebra(GF(2),3);`	Создание алгебры
`El:=Elements(A);`	Построение массива элементов
`S:=Subalgebra(A,[El[a],El[b],El[c]]);`	Записывает подалгебру алгебры A порожденную элементами El[a],El[b],El[c] вS
`for i in S do`	Начало цикла
`for k in S do`	Начало цикла
`for j in S do`	Начало цикла
`s1:=Subalgebra(S,[i,k,j]);`	Записывает подалгебру алгебры S порожденную элементами i,k,j в s1
`if Size(s1)=1 then`	Проверяем размер. Если равен 1
`AddSet(sub[1],Elements(s1));`	Записываем в 1-й массив

fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=2 then	Если равен 2
AddSet(sub[2],Elements(s1));	Записываем во2-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=4 then	Если равен 4
AddSet(sub[3],Elements(s1));	Записываем в 3-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=8 then	Если равен 8
AddSet(sub[4],Elements(s1));	Записываем в 4-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=16 then	Если равен 16
AddSet(sub[5],Elements(s1));	Записываем в 5-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=32 then	Если равен 32
AddSet(sub[6],Elements(s1));	Записываем в 6-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=64 then	Проверяем размер. Если равен 64
AddSet(sub[7],Elements(s1));	Записываем в 7-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=128 then	Если равен 128
AddSet(sub[8],Elements(s1));	Записываем в 8-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
if Size(s1)=512 then	Проверяем размер. Если равен 512
AddSet(sub[9],Elements(s1));	Записываем в 9-й массив
fi;	Закрываем проверку условия
od;	Закрытие цикла
od;	Закрытие цикла
od;	Закрытие цикла
for m1 in [1..Size(sub)] do	Открытие цикла

for l1 in [1..Size(sub[m1])] do	Открытие цикла
for n1 in [1..Size(sub[m1+1])] do	Открытие цикла
ifIsSub-set(sub[m1+1][n1],sub[m1][l1])=true	Проверяет являются ли генераторы sub[m1][l1] элементами sub[m1+1][n1],
Then Add(pokr,[[m1,l1],[m1+1,n1]]);	если да, то записывает в pokr
fi;	Закрытие проверки условия
od;	Конец цикла
od;	Конец цикла
od;	Конец цикла
PrintTo("pokr.txt", pokr,"\n");	Распечатываем массив pokr в файл pokr.txt
end;;	Конец функции

На примере программы № 2 после запуска программы № 4 зададим в **GAP** отношение покрытия одной из подалгебр, которые выдала первая программа: pokr(2, 273, 33).

В результате программа распечатает файл:

[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]],
[[1, 1], [2, 4]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]],
[[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 3]], [[2, 2], [3, 4]],
[[2, 3], [3, 2]], [[2, 3], [3, 3]], [[2, 4], [3, 2]],
[[2, 4], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]],
[[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]].

В данной программе рассматривается подалгебра S, которая содержит 8 элементов и имеет тип (1, 4, 4, 1). Значит, в ней содержится одна нулевая подалгебра, 4 двухэлементных, 4 четырех элементных и 1 восьмиэлементная подалгебра. Таким образом, все подалгебры в решетке подалгебр алгебры S распределены по четырем уровням. На каждом уровне алгебры имеют двойные номера, например, номер [3, 2] означает, что 3 – номер уровня, а 2 – порядковый номер подалгебры на третьем уровне. Таким образом, запись [[3, 2], [4, 1]] означает, что подалгебра с номером [3, 2] покрывается подалгеброй с номером [4, 1] в решетке подалгебр алгебры *S*.

Запустив все созданные мной программы для разных определяющих соотношений, найдя тип и отношение покрытие для полученных троек матриц, объединяем все в одну таблицу:

Таблица №10

№	Тип	Покрытие	Определяющие соотношения
1	(1,4,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 3]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 2]], [[2, 3], [3, 3]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$, $e_1r = re_1 = 0, e_2r = re_2 = r$
2	(1,4,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 3]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 4]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 3]], [[2, 4], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = r_1,$ $er_2 = r_2 = r_2e$
3	(1,5,3,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 2], [3, 2]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 2]], [[2, 3], [3, 3]], [[2, 4], [3, 1]], [[2, 5], [3, 2]],	$r_1^3 = 0, r_1^2 \neq 0, r_2^2 = 0, r_1r_2 = r_1^2,$ $r_2r_1 = 0$

		[[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]]]	
4	(1,5,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 3]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 3]], [[2, 5], [3, 2]], [[2, 5], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = r_1,$ $er_2 = 0, r_2e = r_2$
5	(1,5,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 2]], [[2, 3], [3, 4]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 5], [3, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = 0,$ $er_2 = r_2, r_2e = 0$
6	(1,5,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 5], [3, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$r_ir_j = r_jr_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1e = r_1,$ $er_2 = r_2, r_2e = 0$

7	(1,5,4,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 2]], [[2, 3], [3, 4]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 5], [3, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]]]	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, er_1 = r_1 e = 0,$ $er_2 = 0, r_2 e = r_2$
8	(1,6,5,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 3]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 5]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 3]], [[2, 5], [3, 2]], [[2, 5], [3, 4]], [[2, 5], [3, 5]], [[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 5]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]]]	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j,$ $e_2 r = re_1 = 0, e_1 r = r = re_2$
9	(1,6,5,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 5]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 4], [3, 5]], [[2, 5], [3, 3]], [[2, 5], [3, 4]],	$e_i^2 = e_i, e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i = j,$ $e_1 r = re_1 = 0, e_2 r = 0, re_2 = r$

		[[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 5]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]]]	
10	(1,6,5,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 5]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 4], [3, 5]], [[2, 5], [3, 3]], [[2, 5], [3, 4]], [[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 5]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]]]	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j,$ $e_1r = re_1 = 0, e_2r = r, re_2 = 0$
11	(1,7,6,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[1, 1], [2, 7]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 2], [3, 5]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 6]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 4], [3, 6]], [[2, 5], [3, 2]], [[2, 5], [3, 5]], [[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 4]], [[2, 7], [3, 3]], [[2, 7], [3, 5]], [[2, 7], [3, 6]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]], [[3, 6], [4, 1]]]	$e_i^2 = e_i, e_ie_j = e_je_i = 0$ при $i = j$

12	(1,7,7,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[1, 1], [2, 7]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 2], [3, 5]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 6]], [[2, 3], [3, 7]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 4], [3, 6]], [[2, 5], [3, 2]], [[2, 5], [3, 5]], [[2, 5], [3, 7]], [[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 4]], [[2, 6], [3, 7]], [[2, 7], [3, 3]], [[2, 7], [3, 5]], [[2, 7], [3, 6]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]], [[3, 6], [4, 1]], [[3, 7], [4, 1]]]	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, e r_i = 0,$ $r_i e = r_i$
13	(1,7,7,1)	[[[1, 1], [2, 1]], [[1, 1], [2, 2]], [[1, 1], [2, 3]], [[1, 1], [2, 4]], [[1, 1], [2, 5]], [[1, 1], [2, 6]], [[1, 1], [2, 7]], [[2, 1], [3, 1]], [[2, 1], [3, 2]], [[2, 1], [3, 3]], [[2, 2], [3, 1]], [[2, 2], [3, 4]], [[2, 2], [3, 5]], [[2, 3], [3, 1]], [[2, 3], [3, 6]], [[2, 3], [3, 7]], [[2, 4], [3, 2]], [[2, 4], [3, 4]], [[2, 4], [3, 6]], [[2, 5], [3, 2]], [[2, 5], [3, 5]], [[2, 5], [3, 7]], [[2, 6], [3, 3]], [[2, 6], [3, 4]], [[2, 6], [3, 7]], [[2, 7], [3, 3]], [[2, 7], [3, 5]],	$r_i r_j = r_j r_i = 0, e^2 = e, r_i e = 0,$ $e r_i = r_i$

		[[2, 7], [3, 6]], [[3, 1], [4, 1]], [[3, 2], [4, 1]], [[3, 3], [4, 1]], [[3, 4], [4, 1]], [[3, 5], [4, 1]], [[3, 6], [4, 1]], [[3, 7], [4, 1]]]	

3.4. Построение диаграмм

Используя полученную в пунктах 3.1, 3.2 и 3.3 информацию, строится диаграмма решетки подалгебр алгебры *S*. Построение осуществляется в несколько этапов:

1. Изображаются подалгебры алгебры *S* точками (или кружочками).
2. Изображается отношение покрытия, соединяя покрываемый элемент с покрывающим отрезком.

Таким образом, в работе доказано, что все трехмерные немоногенные подалгебры делятся на семь разных типов по виду решеток. Построены диаграммы всех решеток и проверены на изоморфизм, оказалось, что внутри каждого типа, за исключением типа (1, 4, 4, 1), подалгебры имеют изоморфные решетки подалгебр. Подалгебры с типом решетки (1, 4, 4, 1) делятся на два подмножества и имеют неизоморфные решетки подалгебр.

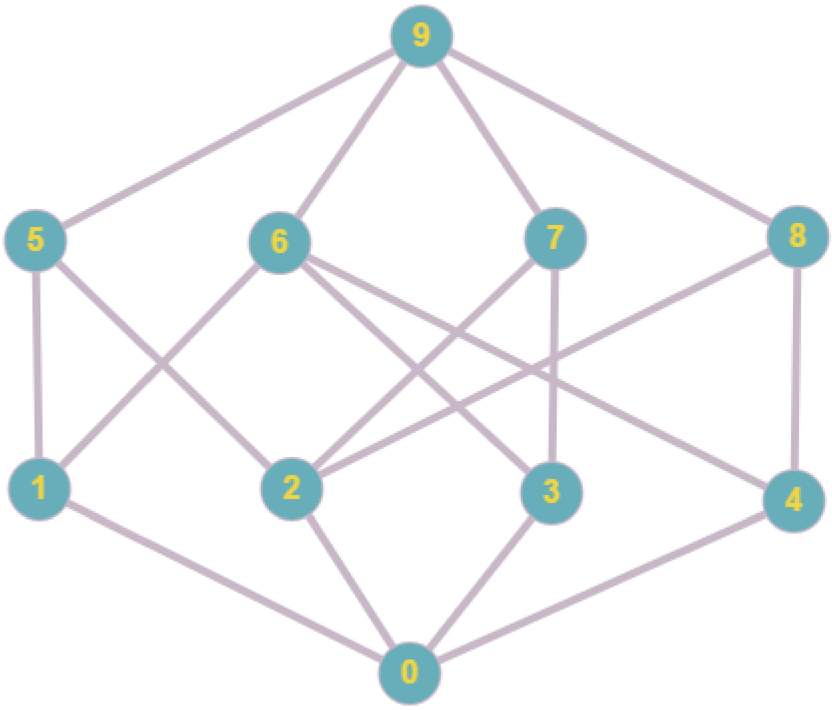

Рисунок 1. Тип [1, 4, 4, 1]

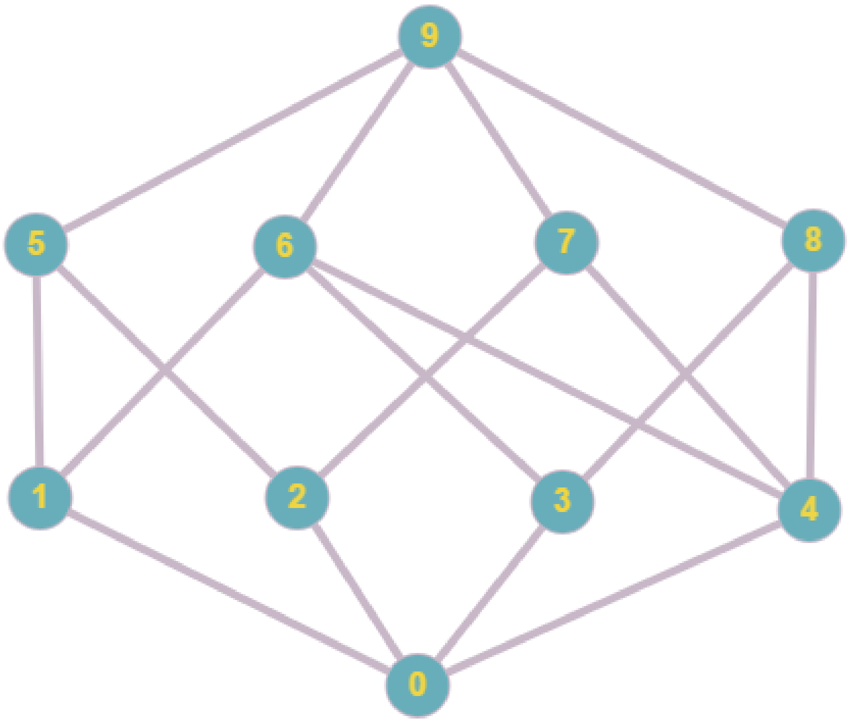

Рисунок 2. Тип [1, 4, 4, 1]

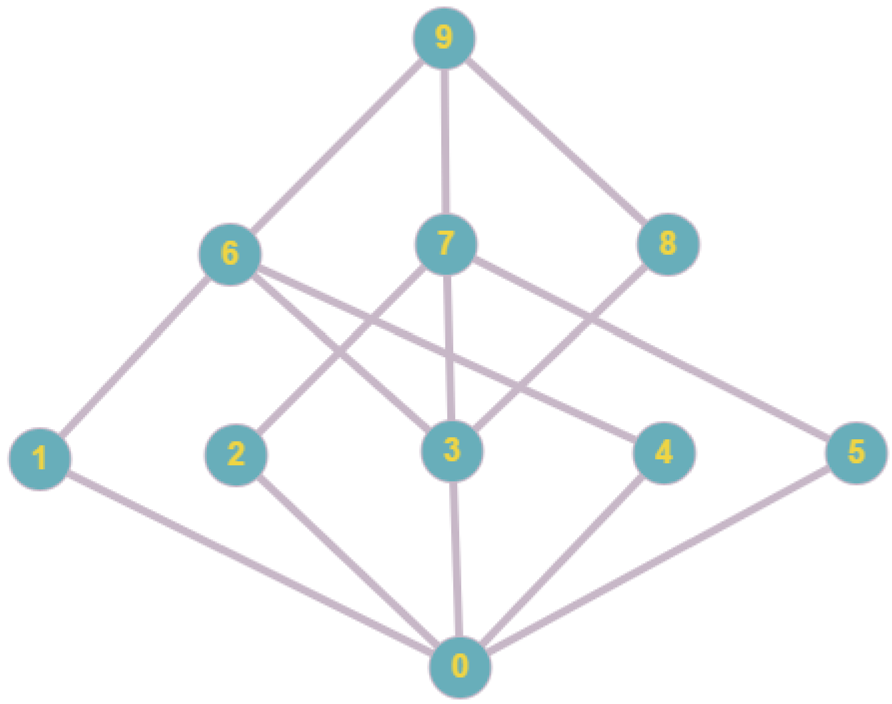

Рисунок 3. Тип [1, 5, 3, 1]

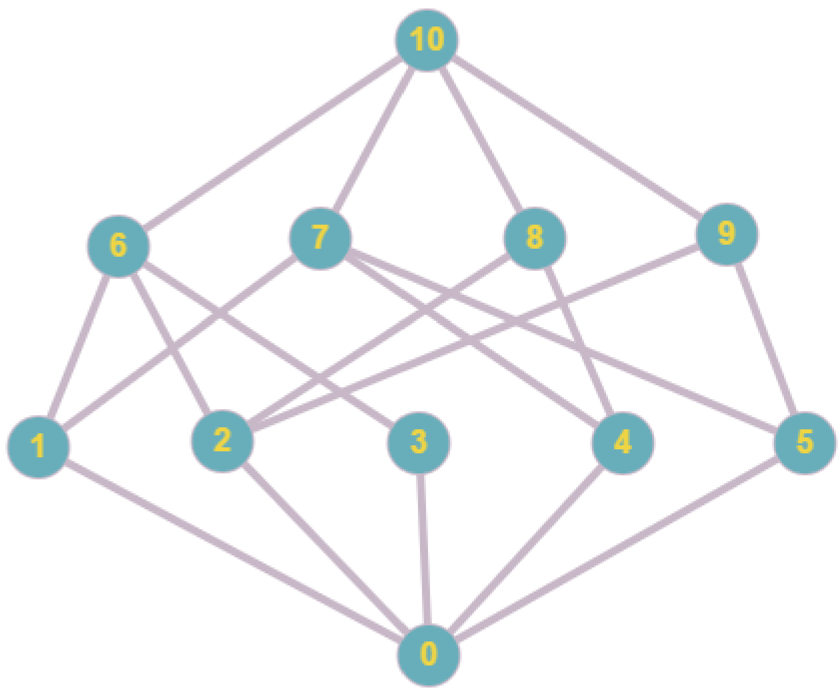

Рисунок 4. Тип [1, 5, 4, 1]

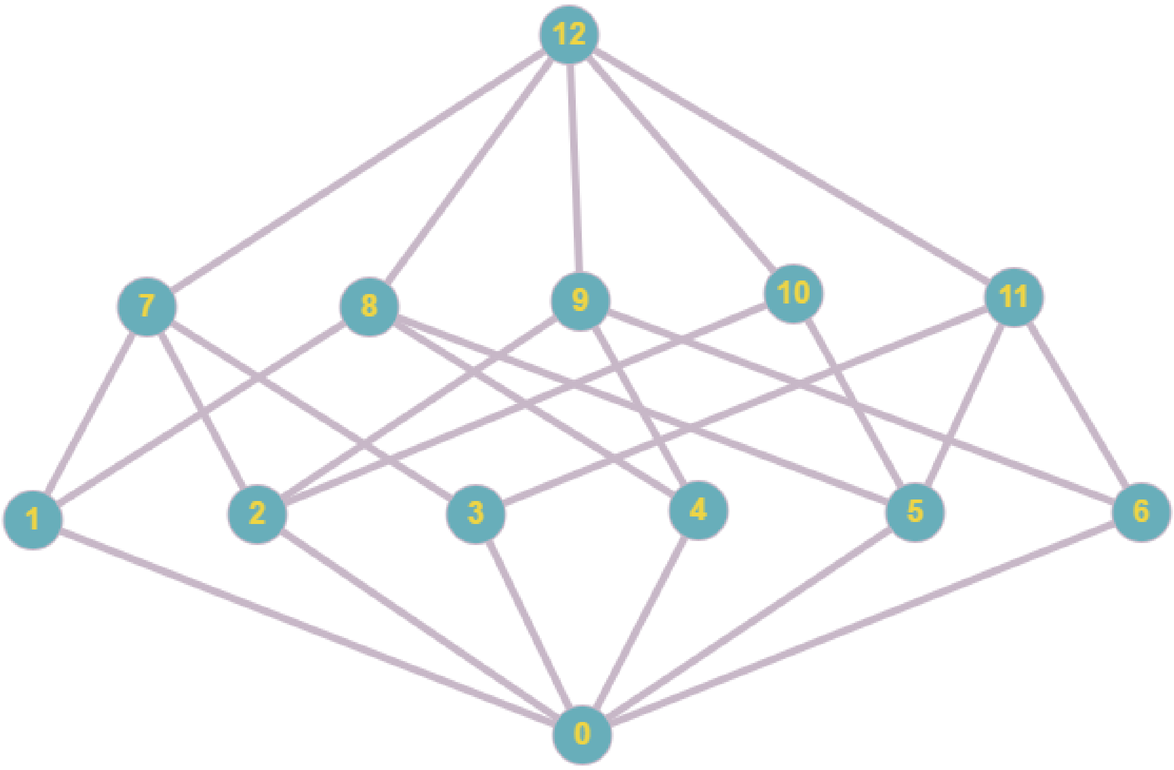

Рисунок 5. Тип [1, 6, 5, 1]

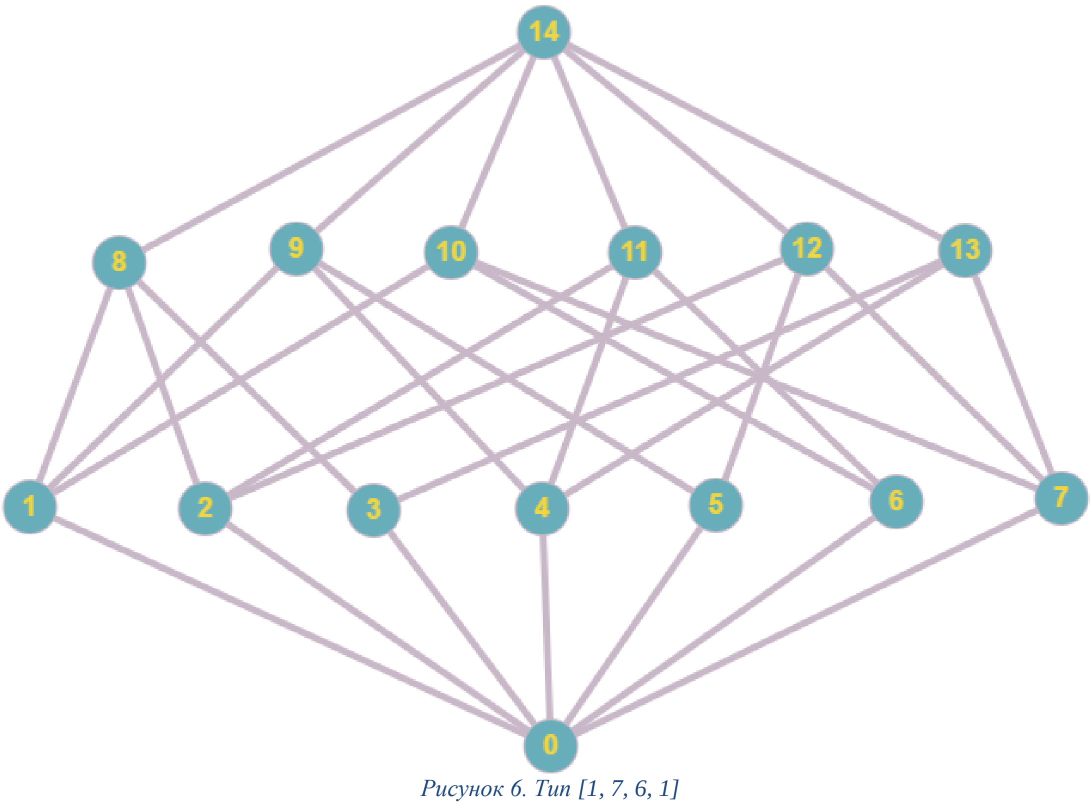

Рисунок 6. Тип [1, 7, 6, 1]

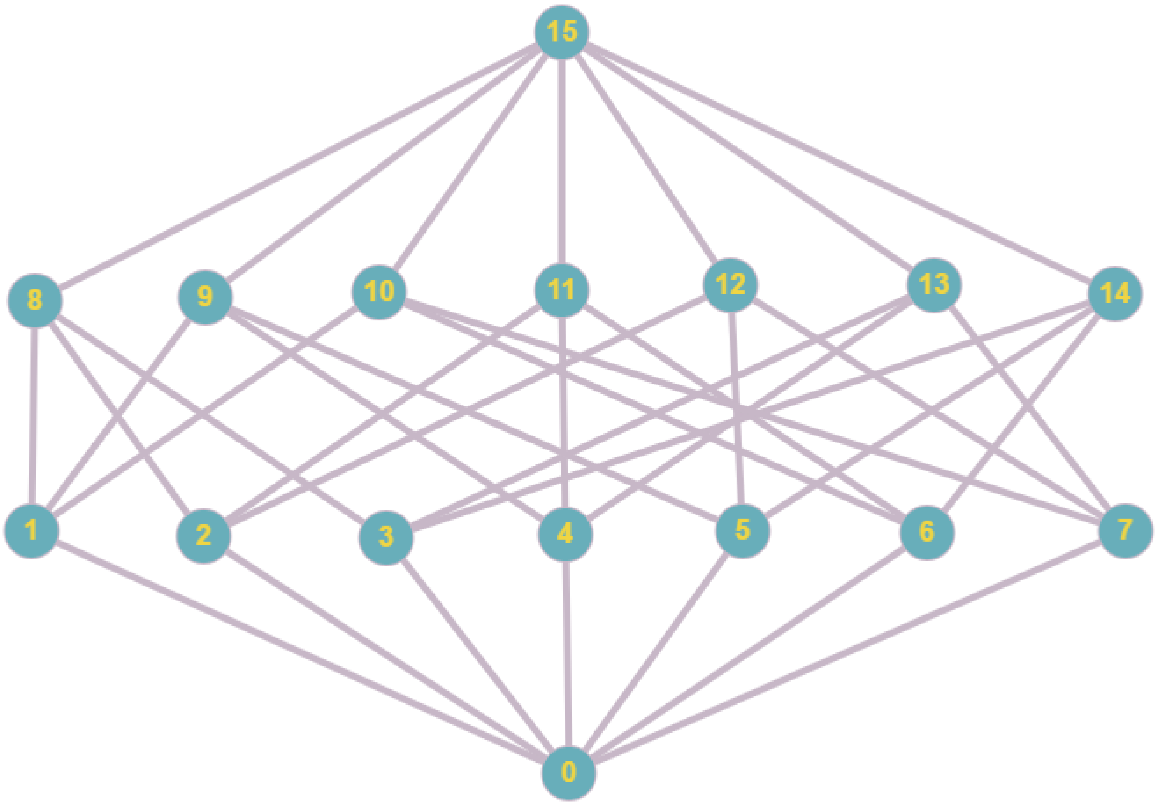

Рисунок 7. Тип [1, 7, 7, 1]

Литература

1. Биркгоф Г., Барти Т. К. Современная прикладная алгебра; пер. с англ. Ю. И. Манина. – Изд. 2-е, стер. – М.: Лань, 2005. – 400 с.
2. Биркгоф, Г. Теория решеток; пер. с англ. В. Н. Салий под ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4 изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988.
4. Гретцер, Г. Общая теория решеток; пер. с англ. А. Д. Больбота, В. А. Горбунова, В. И. Туманова под ред. Д. М. Смирнова. – М. : Мир, 1982. – 456 с.
5. Калужнин, Л. А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
6. Коробков С. С. Введение в теорию решеток: Учеб. пособие по спец. курсу. Урал. гос. пед. ун-т. — Екатеринбург: Б.и., 1996. – 64с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: Учеб. для студентов вузов по спец." Математика", "Приклад. математика". – 13-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 432с.
8. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре: учебник. – СПб.: Лань, 2005. – 560 с.
9. Коробков С.С. Вычисления в матричных алгебрах (Прикладные аспекты алгебры и информатики). (Рукопись). Екатеринбург, 2014.
10. Гришина А.А. Подалгебры матричной алгебры $M_3(GF(2))$. Дипломная работа. УрГПУ. Екатеринбург. 2003.
11. Barnes D.W. Lattice isomorphisms of associative algebras //J. Austral. Math. Soc. 1966. V. 6. № 1. P. 106 – 121.
12. Система компьютерной алгебры GAP – Exponenta. Режим доступа: www.exponenta.ru/soft/others/gap/1.asp
13. GAP Manual. Режим доступа: http://www.gap-system.org/Doc/manuals.html
14. Graph Online URL: http://graphonline.ru/

Приложение

Массив матриц алгебры A = $M_3(GF(2))$

$$m_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_8=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_9=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{13}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{15}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{16}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{17}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{18}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{19}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{20}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{24}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{25}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{26}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{27}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{28}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{29}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{30}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{32}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{33}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{34}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{35}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{36}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{37}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{38}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{39}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{40}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{41}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{42}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{43}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{44}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{45}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{46}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{47}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{48}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{49}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{50}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{51}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{52}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{53}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{54}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{55}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{56}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{57}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{58}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{59}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{60}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{61}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{62}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{63}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{64}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{65}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{66}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{67}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{68}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{69}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{70}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{71}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{72}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{73}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{74}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{75}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{76}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{77}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{78}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{79}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{80}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{81}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{82}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{83}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{84}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{85}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{86}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{87}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{88}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{89}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{90}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{91}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{92}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{93}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{94}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{95}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{96}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{97}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{98}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{99}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{100}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{101}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{102}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{103}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{104}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{105}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{106}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{107}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{108}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{109}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{110}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{111}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{112}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{113}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{114}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{115}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{116}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{117}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{118}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{119}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{120}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{121}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{122}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{123}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{124}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{125}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{126}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{127}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{128}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{129}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{130}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{131}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{132}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{133}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{134}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{135}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{136}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{137}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{138}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{139}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{140}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{141}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{142}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{143}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{144}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{145}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{146}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{147}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{148}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{149}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{150}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{151}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{152}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{153}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{154}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{155}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{156}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{157}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{158}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{159}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{160}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{161}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{162}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{163}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{164}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{165}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{166}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{167}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{168}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{169}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{170}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{171}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{172}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{173}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{174}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{175}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{176}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{177}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{178}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{179}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{180}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{181}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{182}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{183}=\begin{pmatrix}0&1&9\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{184}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{185}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{186}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{187}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{188}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{189}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{190}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{191}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{192}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{193}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{194}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{195}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{196}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{197}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{198}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{199}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{200}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{201}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{202}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{203}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{204}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{205}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{206}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{207}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{208}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{209}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{210}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{211}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{212}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{213}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{214}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{215}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{216}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{217}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{218}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{219}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{220}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{221}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{222}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{223}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{224}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{225}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{226}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{227}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{228}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{229}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{230}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{231}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{232}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{233}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{234}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{235}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{236}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{237}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{238}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{239}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{240}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{241}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{242}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{243}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{244}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{245}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{246}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{247}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{248}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{249}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{250}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{251}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{252}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{253}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{254}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{255}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{256}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{257}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{258}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{259}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{260}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{261}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{262}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{263}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{264}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{265}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{266}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{267}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{268}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{269}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{270}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{271}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{272}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{273}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{274}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{275}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{276}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{277}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{278}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{279}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{280}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{281}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{282}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{283}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{284}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{285}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{286}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{287}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{288}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{289}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{290}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{291}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{292}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{293}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{294}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{295}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{296}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{297}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{298}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{299}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{300}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{301}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{302}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{303}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{304}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{305}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{306}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{307}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{308}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{309}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{310}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{311}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{312}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{313}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{314}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{315}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{316}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{317}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{318}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{319}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{320}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{321}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{322}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{323}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{324}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{325}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{326}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{327}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{328}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{329}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{330}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{331}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{332}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{333}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{334}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{335}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{336}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{337}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{338}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{339}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{340}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{341}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{342}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{343}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{344}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{345}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{346}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{347}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{348}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{349}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ m_{350}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ m_{351}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ m_{352}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{353}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ m_{354}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ m_{355}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ m_{356}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{357}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{358}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{359}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{360}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{361}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{362}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{363}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{364}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{365}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{366}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{367}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{368}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{369}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{370}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{371}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{372}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{373}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{374}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{375}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{376}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{377}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{378}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{379}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{380}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{381}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{382}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{383}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{384}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{385}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{386}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{387}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{388}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{389}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{390}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{391}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{392}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{393}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{394}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{395}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{396}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{397}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{398}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{399}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{400}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{401}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{402}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{403}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{404}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{405}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{406}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{407}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{408}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{409}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{410}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{411}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{412}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{413}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{414}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{415}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{416}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{417}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{418}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{419}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{420}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{421}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{422}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{423}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{424}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{425}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{426}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{427}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{428}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{429}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{430}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{431}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{432}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{433}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{434}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{435}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{436}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{437}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{438}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{439}=\begin{pmatrix}1&1&9\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{440}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{441}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{442}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{443}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{444}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{445}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{446}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{447}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{448}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{449}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{450}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{451}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{452}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{453}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{454}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{455}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{456}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{457}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{458}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{459}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{460}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{461}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{462}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{463}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{464}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{465}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{466}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{467}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{468}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{469}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{470}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{471}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{472}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{473}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{474}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{475}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{476}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{477}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{478}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{479}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{480}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{481}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{482}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{483}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{484}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{485}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{486}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{487}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{488}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{489}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{490}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{491}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{492}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{493}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{494}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{495}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{496}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{497}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{498}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{499}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{500}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{501}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{502}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{503}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{504}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{505}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, m_{506}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, m_{507}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, m_{508}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$m_{509}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, m_{510}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}, m_{511}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}, m_{512}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$